Le statistiche

Alcuni modelli per la rappresentazione dei dati

Scheda **2**

I record

0. Introduzione

Nella scheda 1 abbiamo considerato alcuni *modelli* matematici usati nelle statistiche.
Abbiamo visto come con rappresentazioni grafiche e numeriche si possa facilitare il confronto tra dati diversi, tra le parti che compongono un totale, tra una parte e il totale, … , ma anche come, in cambio, si possano perdere altre informazioni.

Consideriamo ad esempio l'incidenza della carne bovina sul totale della carne consumata pro-capite. Impiegando *rappresentazioni percentuali* possiamo dire che in 60 anni (dal 1926 al 1985) è passata dal 47% al 32%. A prima vista si potrebbe concludere che è diminuito il consumo di carne bovina, ma ciò non è vero: si è passati dal consumo pro-capite di 10.1 kg all'anno a quello di 25.1 kg all'anno (cioè, dividendo per 365, da 28 a 70 grammi al giorno).
Infatti se la *parte percentuale* diminuisce ma, nel frattempo, aumenta il *totale*, il *dato* può comunque aumentare. [→ Le Statistiche-1]

Abbiamo anche visto che dalla conoscenza del *totale* e della *parte percentuale* non si può ritrovare il valore esatto del *dato*. Infatti le percentuali vengono arrotondate con valori approssimati.

Per le statistiche valgono le osservazioni che abbiamo fatto più in generale per i modelli matematici: l'uso della matematica per analizzare un problema non basta per garantire l'esattezza dell'analisi poiché nel rappresentare una situazione con un modello matematico si scelgono solo alcuni aspetti tralasciandone altri, e anche gli aspetti presi in considerazione sono spesso rappresentati approssimativamente.
[→ La Matematica e i suoi modelli-3]

Abbiamo fatto queste osservazioni anche a proposito dei *valori medi*. Ad esempio il voto medio di matematica alla fine dell'anno in una classe può essere 6 e 1/2, ma è ben diversa la situazione in cui quasi tutti gli alunni abbiano 6 o 7 da quella in cui vi siano anche molti 4, 5 e 8.

In ***questa scheda*** discuteremo altri strumenti matematici impiegati nelle statistiche. Come argomento per le nostre esemplificazioni prenderemo i ***record sportivi***.

1. Il salto in alto - I grafici

In *figura 1* sono rappresentati graficamente i record di ***salto in alto*** *maschile* e gli anni in cui essi sono stati stabiliti (a partire dal 1912, anno in cui si sono svolte le Olimpiadi di Stoccolma); fino al 2021 il record è di 245 cm, stabilito nel 1993.

I punti che rappresentano i vari record non si distinguono molto bene. Per ottenere una rappresentazione più leggibile possiamo far passare l'asse orizzontale invece che per il punto dell'asse verticale che rappresenta 0 cm per quello che rappresenta una quota maggiore, ad esempio 195 cm (il primo record registrato è di 200 cm). Possiamo così dilatare il grafico verticalmente e ottenere la *figura 2*.

1 Nel 1934 è stato stabilito un record? Se sì, quale? E nel 1960?

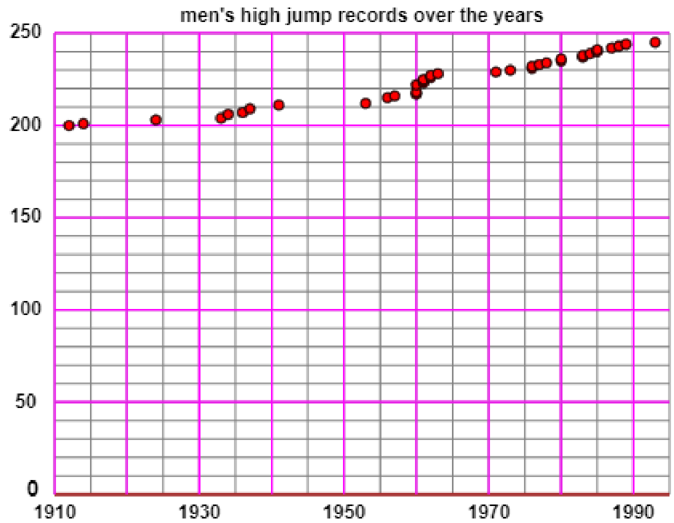
2 Qual era il record in vigore nel 1920?

3 Segna in figura 2 in corrispondenza degli anni 1917, 1919 e 1922 i punti che rappresentano i record in vigore in tali anni.

Nelle *figure 3* e *4* sono riportati due possibili "completamenti" del grafico di figura 2.

4 Quale dei due grafici rappresenta per ogni anno qual era il record in vigore?

fig.1



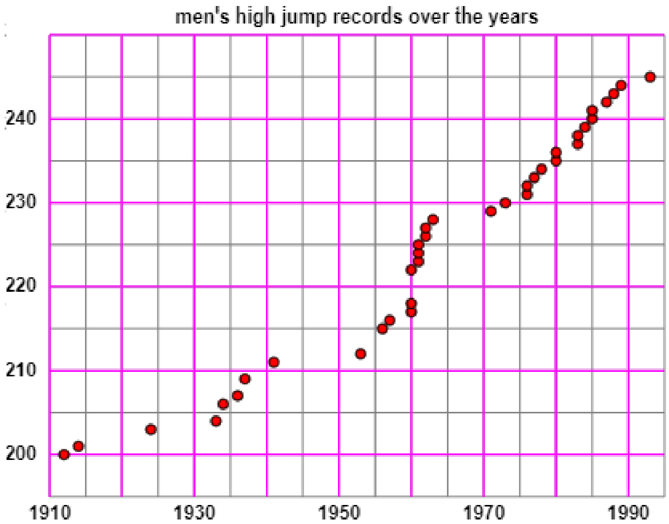


fig.2

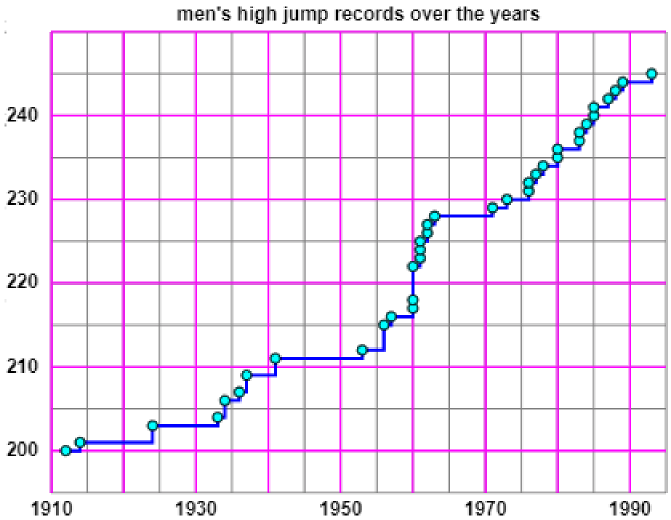


fig.3

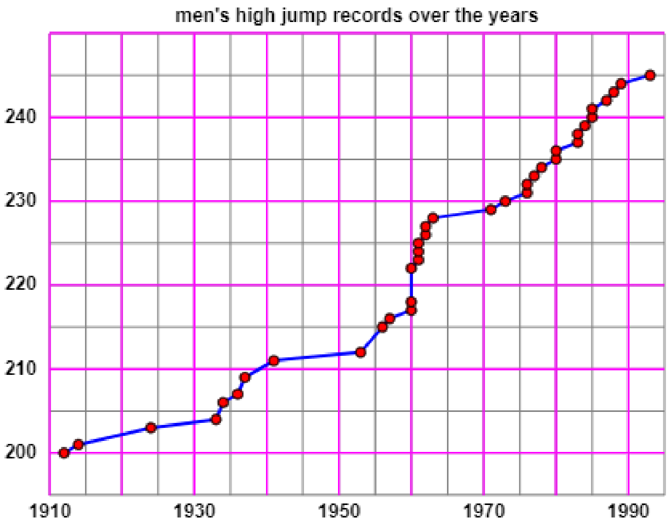


fig.4

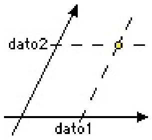
La rappresentazione in figura 4 evidenzia meglio l'evoluzione dei risultati della specialità del salto in alto, ma i segmenti con cui sono stati congiunti i punti che rappresentano i record man mano stabiliti sono fittizi.

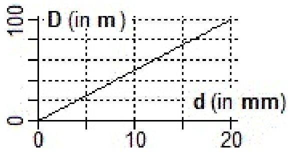
La rappresentazione di figura 3 evidenzia meglio la durata dei vari record e permette di trovare per ogni anno il record in vigore. La durata dei record non è comunque rappresentata del tutto fedelmente: abbiamo considerato gli anni in cui i record sono stati stabiliti, non le date esatte.

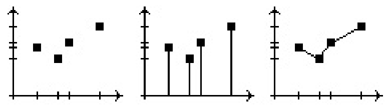
Le rappresentazioni nelle figure 1-4 vengono tutte chiamate ***grafici***. A volte la parola "grafico" viene usata come sinonimo di "diagramma", cioè di "rappresentazione grafica". Più spesso viene usata per indicare un particolare tipo di diagramma impiegato per rappresentare la *relazione che intercorre tra i valori numerici di due grandezze*. Abbiamo già rappresentato, per es., la relazione tra percorrenza e tariffa ferroviaria, tra tempo trascorso e posizione del treno lungo la linea ferroviaria [➨ LMSM-2], tra dato assoluto e percentuale [➨ LS-1] e, ora, tra anno di conseguimento e valore del record:

- le grandezze sono state rappresentate su due ***assi di riferimento***, cioè due rette non parallele (in genere perpendicolari) ai cui punti sono stati associati i valori delle grandezze mediante una opportuna *scala numerica*; nel caso dei record:
– si è fissato un punto a cui è stato associato un dato valore (ad es. un punto a cui è stato associato 1910),
– si è fissato un segmento a cui è stato associato un altro valore (ad es. al segmento tra due tacche è stato associato 1 anno)
– e, fissato un verso (→ punta della freccia), con questa "unità di misura" si sono rappresentati gli altri valori;

- e ogni coppia di dati uno in relazione con l'altro è stata rappresentata con un ***punto***:
– se *dato1* è il valore di una grandezza e *dato2* è il corrispondente valore dell'altra grandezza, a partire dal punto che su un asse rappresenta *dato1* si traccia una retta parallela all'altro asse; lo stesso si fa per *dato2*;
– l'intersezione delle due rette è il *punto* che rappresenta il fatto che *dato1* è in relazione con *dato2*;
– i valori *dato1* e *dato2* vengono detti ***coordinate*** del *punto*; il *punto* viene designato anche con (*dato1*,*dato2*); *dato1* e *dato2* vengono detti, rispettivamente, ***ascissa*** e ***ordinata*** del *punto*.

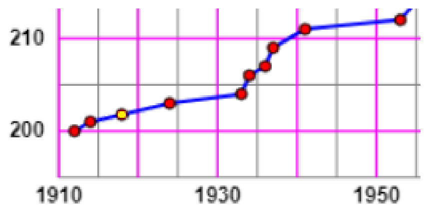


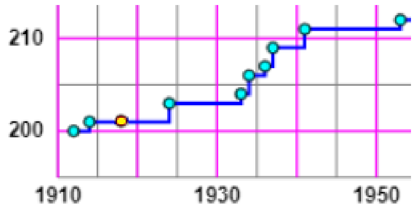




In alcuni casi si ottengono grafici che "coprono" interamente l'intervallo numerico rappresentato sull'asse orizzontale, come nella figura sopra al centro (le ascisse sono le distanze *d* su una cartina in scala 1:5000, le ordinate sono le corrispondenti distanze *D* nella realtà).

Nei casi in cui si ottengono punti isolati, come ad esempio nel caso di ➜ figura 2, per facilitare la lettura del grafico, invece dei soli punti si possono tracciare dei segmenti verticali o dei segmenti che congiungono un punto all'altro. Vedi la figura sopra a destra.





Ma i punti dei segmenti così tracciati non rappresentano un'effettiva associazione tra le due grandezze considerate. Ad esempio nel caso di figura 4 il punto di ascissa 1918 (la cui ordinata è circa 202) non indica che nel 1918 è stato stabilito il record di 202 cm.

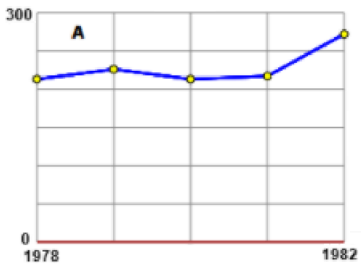
Invece i punti del grafico di figura 3 rappresentano tutti una relazione tra le grandezze "anno" e "record in vigore". Ad esempio il punto (1918,201) indica che nel 1918 era in vigore il record di 201 cm. Più in generale questo grafico rappresenta le coppie (*A*,*R*) così descrivibili: «nell'anno *A* era in vigore il record *R*».

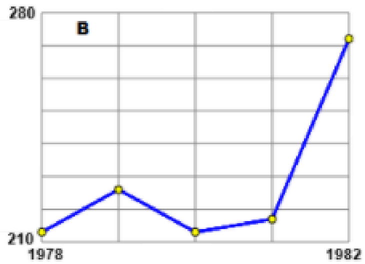
I grafici delle ➜ figure 1 e 2 sono costituiti entrambi dai punti (*A*,*R*) così descrivibili: «il record *R* è stato stabilito nell'anno *A*». Essi differiscono solo per la ***scala*** numerica che è stata fissata sull'asse verticale: in una al punto in comune con l'asse orizzontale è stato assegnato il valore 0 e alla distanza tra due tacche è stato associato il valore 5 (cm), nell'altra allo stesso punto è stato assegnato il valore 198 e alla distanza tra due tacche si è associato il valore 1.

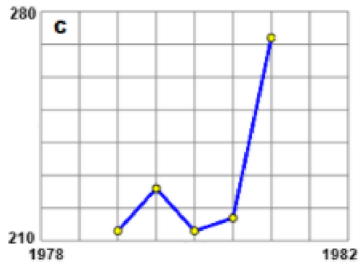
La scelta di scale opportune è assai importante al fine di rendere più leggibile un grafico o più evidente il fenomeno che con esso si vuol rappresentare. Bisogna comunque osservare che, se non si tiene conto della scala scelta, si può essere indotti a valutazioni errate. Ad esempio il grafico di figura 2 rispetto a quello di figura 1 può far sopravvalutare i miglioramenti che si sono verificati nel salto in alto.

5 Sotto sono raffigurati diversi grafici della tabella a fianco (la disoccupazione in Italia in alcuni anni del secolo scorso).
(1) Quali grafici pensi sarebbe stato più facile trovare in un giornale finanziato da gruppi economici vicini ai partiti che in quegli anni erano al governo? (2) Quali pensi sarebbe stato più facile trovare in un volantino sindacale?

anno	disoccupati (in migliaia)
1978	212
1979	226
1980	212
1981	217
1982	283





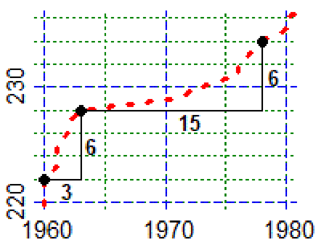


6 Torniamo al salto in alto. Di quanti centimetri è migliorato il record dal '12 all'88?

7 Dal 1960 al 1963 il record ha avuto un aumento di ...... cm. Dal 1963 al 1978 ha avuto un aumento di ...... cm. Possiamo dire che nei due periodi l'evoluzione della specialità è stata egualmente rapida? (motiva la tua risposta facendo riferimento al grafico di fig. 3 o a quello di fig. 4)

8 Completa la tabella seguente:

intervallo di anni	durata (anni)	aumento del record (cm)	aumento medio (cm/anno)
1960-1963			
1963-1978			



Nel periodo 1960-1963 il grafico è più ripido che nel periodo 1963-1978. In altre parole la sua *pendenza media* (rapporto tra avanzamento verticale e avanzamento orizzontale) è maggiore.

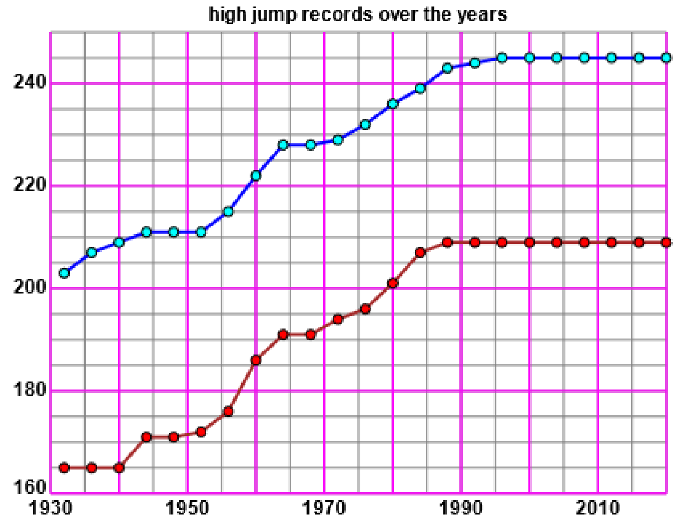
Senza andare a misurare con il righello i due avanzamenti possiamo esprimere numericamente la pendenza mediante l'***aumento medio*** annuo, cioè il rapporto tra aumento del record (variazione dei valori rappresentati sull'asse verticale) e numero degli anni trascorsi (variazione dei valori rappresentati sull'asse orizzontale).

Abbiamo visto che nel primo periodo l'aumento è di 2 cm all'anno e che nel secondo è di 0.4 cm all'anno.

Possiamo pure dire che nel primo periodo il record è cresciuto più *velocemente*.

2. Record maschili e femminili - I numeri indici e le variazioni percentuali

figura 5



Per approfondire l'analisi dell'evoluzione del salto in alto consideriamo anche i record femminili (fino al 2020 il record femminile è di 209 cm, stabilito nel 1987). La *figura 5* presenta sullo stesso sistema di riferimento il grafico dei record maschili e quello dei record femminili; più precisamente sono considerati solo gli anni in cui si sono svolte o si sarebbero dovute svolgere le Olimpiadi e i record che in quegli anni erano in vigore. Il grafici partono da 1932; infatti prima lo sport femminile non esisteva ufficialmente.

9 (a) In quali periodi i record femminili sono evoluti più velocemente? (b) Sono i periodi in cui sono evoluti più velocemente anche i record maschili? (c) Come hai stabilito ciò?

10 L'andamento simile dei due grafici fa supporre che vi siano dei fattori comuni che hanno condizionato, in positivo o in negativo, l'evoluzione della specialità. Sicuramente la stasi negli anni 40 è dovuta alla seconda guerra mondiale (le Olimpiadi del 1940 e del 1944 non sono state disputate). Quali possono essere state le cause dell'impennata nella seconda metà degli anni 50 e della ripresa dopo il 1970?

Vogliamo costruire un *modello* che ci consenta di confrontare meglio l'andamento (a partire dal 1932) dei record maschili e dei record femminili, tenendo conto che la differenza tra le quote raggiunte dagli uomini e quelle raggiunte dalle donne dipende anche dalla diversa costituzione fisica, e in particolare dalla diversità di altezza.

Un'idea può essere quella illustrata in *figura 6*: dilatare o contrarre verticalmente i due grafici fino a far coincidere il punto di partenza. Nella figura i grafici sono stati entrambi contratti verticalmente (di più quello dei maschi, meno quello delle femmine) in modo da farli partire dal medesimo punto H.

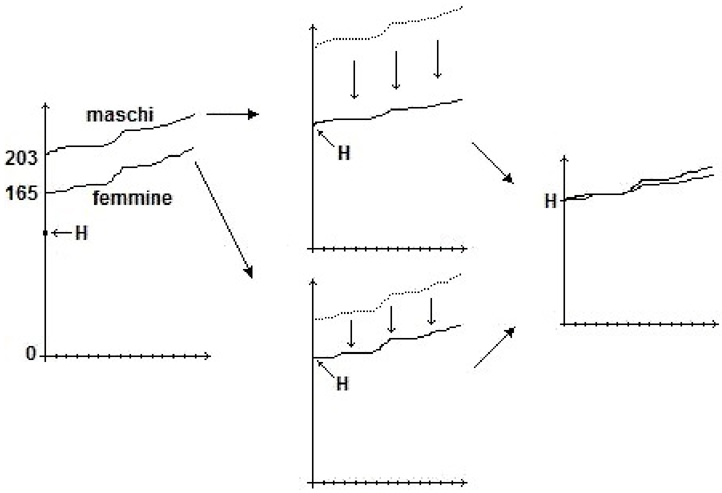


figura 6

Come possiamo realizzare questa trasformazione? Possiamo procedere in modo simile a come abbiamo operato nella Scheda 1 per confrontare come cambiavano i consumi in epoche diverse:

- là non potevamo confrontare direttamente i dati relativi a anni diversi poiché era cambiato il valore (e il tipo) della moneta; quindi per ogni anno trasformavamo in 100 (o in 360) il totale dei consumi e modificavamo proporzionalmente i dati relativi alle singole voci; in questo modo potevamo valutare come cambiava l'incidenza di una voce indipendentemente dai cambiamenti di valore della moneta;
- qui non possiamo confrontare direttamente l'evoluzione dei record dei due sessi poiché i due grafici partono da valori diversi (165 e 203 cm nel 1932); allora possiamo porre uguale a 100 il record maschile del 1932 e modificare in proporzione quelli degli altri anni, fare lo stesso per i record femminili e rappresentare graficamente i dati così trasformati.

In pratica, mentre prima esprimevamo in forma percentuale il rapporto tra ogni *dato* e il *totale*, cioè calcolavamo: $\dfrac{dato}{totale} \cdot 100$

ovvero moltiplicavamo ogni dato per il fattore di proporzionalità "*totale* → 100": $dato \cdot \dfrac{100}{totale}$

ora calcoleremo: $\dfrac{record}{} \cdot 100$ ovvero: $record \cdot \dfrac{100}{}$

record iniziale *record iniziale*

Quindi per trovare come rappresentare, ad es., il record femminile di 209 cm si può calcolare il rapporto tra 209 e il record iniziale (165) ed esprimerlo in centesimi:

$$209/165 = 1.2666\ldots = 126.666\ldots\%$$

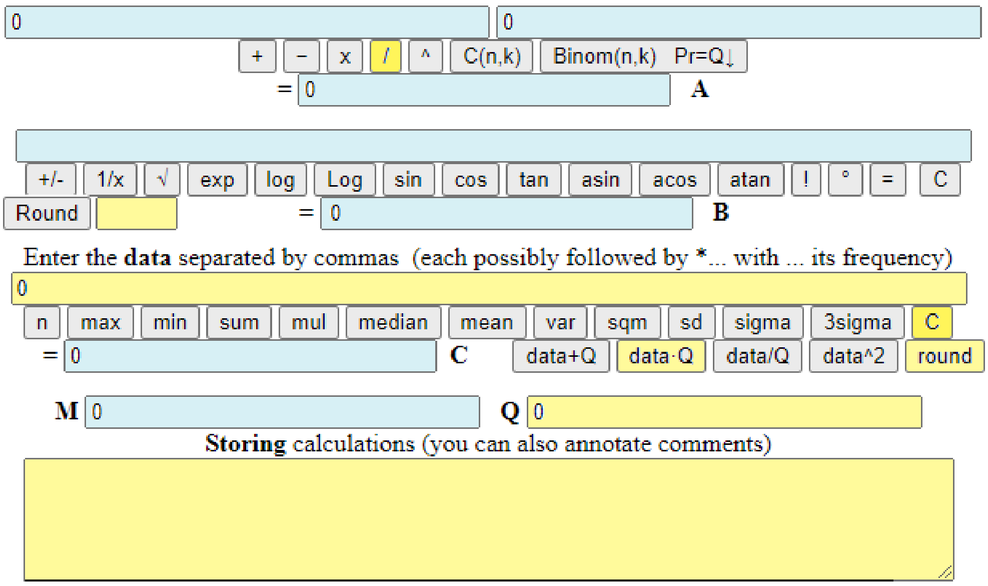
Quindi 209 è il 126.666… per cento di 165, cioè, posto 165 uguale a 100, 209 diventa 126.666….

Se si devono trasformare più dati conviene il 2° metodo: calcolare una volta per tutte il fattore di proporzionalità k (=100/165), memorizzarlo e man mano calcolare *record*$\cdot k$.

Per facilitare la rappresentazione consideriamo solo un anno ogni 4. Più precisamente consideriamo gli anni 1932, 1936, 1940, …, 1992, 1996 (cioè gli anni in cui si sono svolte o si sarebbero dovute svolgere le Olimpiadi) e i record, maschili e femminili, che in quegli anni erano in vigore:

```
1932,1936,1940,1944,1948,1952,1956,1960,1964,1968,1972,1976,1980,1984,1988,1992,1996
 203, 207, 209, 211, 211, 211, 215, 222, 228, 228, 229, 232, 236, 239, 243, 244, 245
 165, 165, 166, 171, 171, 172, 176, 186, 191, 191, 194, 196, 201, 207, 209, 209, 209
```

Per fare i calcoli velocemente usiamo la calcolatrice che abbiamo già impiegato: **CT**.



Si tratta di una calcolatrice più sofisticata delle usuali calcolatrici scientifiche, che contiene molti nomi di funzione e molte possibilità di calcolo che useremo più avanti. Per ora sfruttiamo solo la possibilità di operare facilmente su una sequenza di dati, come quelli considerati sopra.

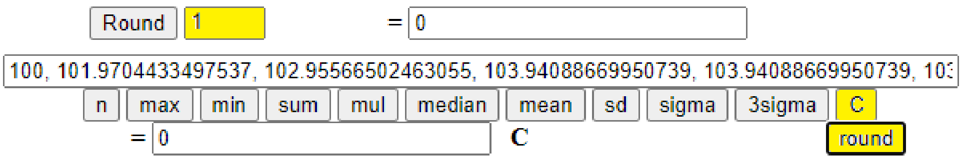
Consideriamo i dati relativi ai maschi (`203, 207, …`). Se li copiamo e incolliamo (al posto di 0) nella riga "Enter the data …" possiamo operare su di essi trasformandoli tutti proporzionalmente e in modo che il primo dato (203) diventi 100, cioè moltiplicandoli per 100 e dividendoli per 203, ovvero moltiplicandoli per 100/203.

Per far ciò calcoliamo 100/203 mettendo 100 e 203 nelle prime due caselle e cliccando **[/]**. Otteniamo: `0.49261083743842365`.

Copiamo questo valore nella casella **p** e clicchiamo **[data·p]**. Otteniamo:

```
100, 101.9704433497537, 102.95566502463055, 103.94088669950739, 103.94088669950739, 103.94088669950739,
105.91133004926108, 109.35960591133005, 112.3152709359606, 112.3152709359606, 112.80788177339902, 114.28571428571429,
116.25615763546799, 117.73399014778326, 119.70443349753695, 120.19704433497537, 120.68965517241385.
```

Per arrotondare i valori ottenuti ai decimi cancello con **[C]** i dati precedenti (`203, 207, …`) dalla riga "Enter the data …" e vi copio questi. Poi metto **1** nella casella a fianco a **[Round]** e clicco **[round]**.



Ottengo:

```
100, 102, 103, 103.9, 103.9, 103.9, 105.9, 109.4, 112.3, 112.3, 112.8, 114.3, 116.3, 117.7, 119.7, 120.2, 120.7.
```

$\boxed{11}$ Trasforma, analogamente, i dati realtivi ai record femminili.

Esaminando i valori ottenuti per i maschi e per le femmine

```
 32, 36,  40,   44,   48,   52,   56,   60,   64,   68,   72,   76,   80,   84,   88,   92,  96
100,102,103,  103.9,103.9,103.9,105.9,109.4,112.3,112.3,112.8,114.3,116.3,117.7,119.7,120.2,120.7
100,100,100.6,103.6,103.6,104.2,106.7,112.7,115.8,115.8,117.6,118.8,121.8,125.5,126.7,126.7,126.7.
```

si ha un'idea più immediata di come sono evoluti i record. Infatti è più facile confrontare un numero con 100 che con 203 o con 165.

Questi valori con cui abbiamo rappresentato i dati vengono detti ***numeri indici***, cioè "numeri che indicano". Infatti non danno informazioni sull'entità dei dati reali (*numeri assoluti*), ma indicano soltanto come questi sono variati rispetto al dato che è stato posto eguale a 100. Questo dato, assunto come punto di riferimento, viene chiamato ***dato base***. Abbiamo quindi:

(2.1) $$\textit{numero indice} = \frac{\textit{dato}}{\textit{dato base}} \cdot 100$$ ovvero: **(2.2)** $$\textit{numero indice} = \textit{dato} \cdot \frac{100}{\textit{dato base}}$$

A volte il dato base viene associato a numeri diversi da 100 (in particolare 1 e 1000).

A fianco sono riprodotti i grafici dei numeri indici dei record considerati sopra.

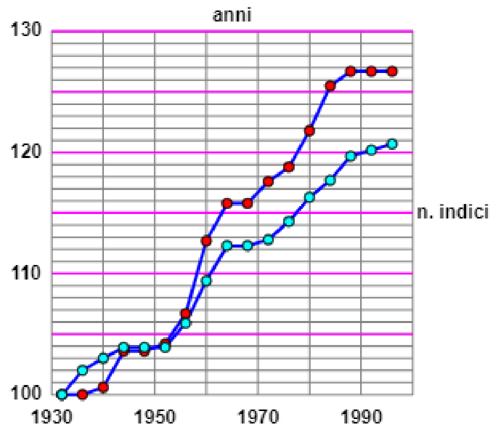


figura 7

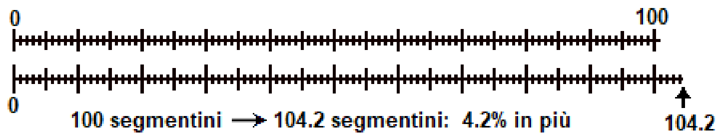
Sui grafici si può osservare che in una prima fase (anni 30) la specialità femminile è progredita più lentamente di quella maschile (che era praticata già da molti anni ed era in fase di netta evoluzione). Successivamente le donne hanno avuto miglioramenti man mano più intensi, fino a che il numero indice del loro record ha *sorpassato* quello degli uomini.

	1932	1952	1932	1952
M	203	211	100	103.9
F	165	172	100	104.2

12 Tra il 1932 e il 1952 il primato di salto in alto per le donne è aumentato di 7 cm; per gli uomini l'aumento è stato di 8 cm, cioè maggiore. Passando dai dati assoluti ai numeri indici l'aumento è ancora maggiore per gli uomini?

Possiamo dire che il record femminile in questo periodo è aumentato del 4.2%, cioè di 4.2 centesimi (vedi *figura 8*), mentre quello maschile è aumentato del 3.9%.

figura 8



La *variazione assoluta* tra dato iniziale e dato finale (cioè *dato finale – dato iniziale*) è spesso meno espressiva della ***variazione percentuale***, cioè della variazione descritta in *centesimi del dato iniziale*.

Quando non si disponga già di una rappresentazione in numeri indici che abbia il dato iniziale come dato base, per calcolare la variazione percentuale occorre prima trovare il rapporto percentuale tra dato finale e dato iniziale. Quindi si calcola quanti centesimi in più (nel caso di aumento) o in meno (nel caso di diminuzione) vi sono rispetto al 100%. In formule:

$$\textbf{(2.3)} \quad \textit{rapporto percentuale} = \frac{\textit{dato finale}}{\textit{dato iniziale}} \cdot 100 \qquad (= \textit{n° indice} \text{ con base } \textit{dato iniziale})$$

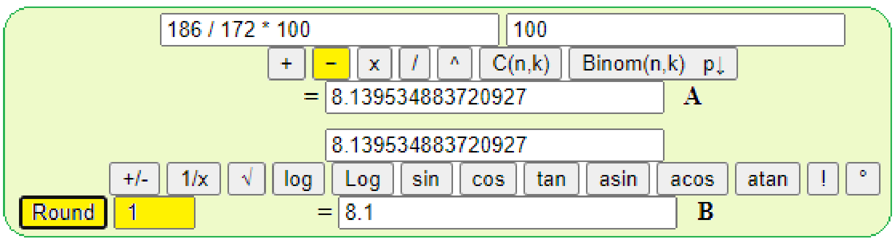
$$\textbf{(2.4)} \quad \textit{variazione percentuale} = \textit{rapporto percentuale} - 100$$

Come esempio calcoliamo con la "piccola" **CT** la variazione percentuale tra il record femminile del 1952 (172 cm) e quello del 1960 (186 cm):

186 / 172 * 100 - 100 → **8.1** (scegliendo di arrotondare a 1 cifra decimale)

La variazione è dell'8.1% in più.

Avrei potuto usare anche la "grande" **CT**:



13 Di quanto è variato il numero indice dei record femminili passando dal 1952 al 1960? E` uguale alla variazione percentuale trovata sopra? Perché questa diversità rispetto alla situazione del quesito 12?

14 Elezioni politiche nel paese XX. Il Partito A passa dal 18.4% dei voti al 17.1%. Il partito B passa dal 29.6% al 27.8% dei voti. Il leader del partito A afferma: «Abbiamo tenuto più del partito B. Noi siamo scesi solo poco più dell'1%, mentre loro sono scesi quasi del 2%».

In effetti la variazione da 18.4 a 17.1 è -1.3 (più vicina a -1 che a -2), mentre quella da 29.6 a 27.8 è -1.8 (più vicina a -2 che a -1). Tuttavia se rappresentiamo il *consenso* che riceve un partito con la sua percentuale di voti e valutiamo di quanto è variato percentualmente il *consenso* di A e di B possiamo renderci conto delle sciocchezze che ha detto il leader di A. Completa i seguenti calcoli:

$$\frac{\textit{consenso nuovo di A}}{\textit{consenso precedente di A}} = \frac{17.1}{18.4} = 0.9293\ldots = 92.9\%: \quad \textit{diminuzione} \text{ del } 7.1\%$$

$$\frac{\textit{consenso nuovo di B}}{\textit{consenso precedente di B}} = \frac{27.8}{29.6} = \ldots\ldots\ldots \qquad \textit{diminuzione del} \ldots..$$

Per risolvere le difficoltà che hanno messo in luce i quesiti 13 e 14 si può usare il termine ***punti percentuali***. Nel caso del quesito 14 possiamo dire che A ha perso 1.3 punti percentuali e che B ha perso 1.8 punti percentuali. Nel caso del quesito 13 possiamo dire che il record femminile dal 1952 al 1960 è aumentato di 8.5 punti percentuali. Ma non si tratta di variazioni percentuali del consenso di un partito o di variazioni percentuali del record:

– nel caso del partito A, il numero 1.3 rappresenta centesimi del totale dei voti, non dei voti di A,
– nel caso dei record, 8.5 rappresenta centesimi del record del 1932, non del record del 1952.

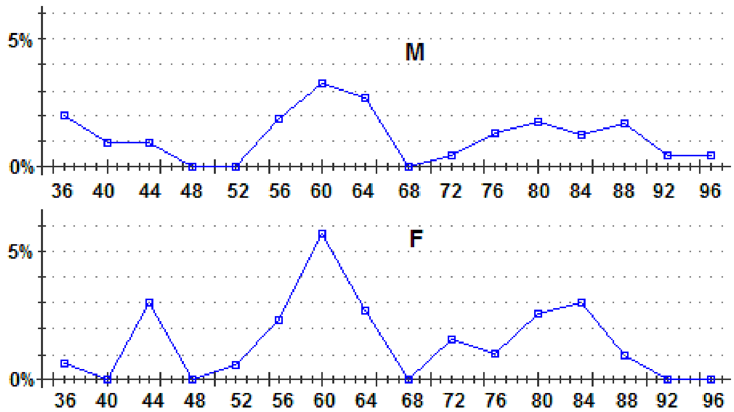
Dai grafici di fig. 7 si ha l'impressione che le donne dal 1950 al 1990 abbiano guadagnato rapidamente terreno sugli uomini. Sembra infatti che il record femminile sia cresciuto molto più velocemente di quello maschile.

Dai grafici di figura 5 emerge invece che in quegli anni record maschili e femminili sono cresciuti più o meno con la stessa velocità.

Questa errata impressione è dovuta al fatto che i numeri indici rappresentano le percentuali rispetto ai dati del 1932, senza tener conto dei successivi miglioramenti:

– per le donne 2 cm in più sono sempre un aumento di $2/165 \cdot 100 = 1.2$ punti percentuali;
– per gli uomini 2 cm in più sono sempre un aumento di $2/205 \cdot 100 = 1.0$ punti percentuali.

Per un miglior confronto dell'andamento dei record maschili e di quelli femminili posso rappresentare graficamente le variazioni percentuali ogni 4 anni, cioè rappresentare per il 1936 la variazione percentuale rispetto al 1932, per il 1940 la variazione percentuale rispetto al 1936, e così via. Ottengo i grafici di *figura 9*.



variazioni percentuali di 4 anni in 4 anni del record *maschile* di salto in alto in vigore

variazioni percentuali di 4 anni in 4 anni del record *femminile* di salto in alto in vigore

figura 9

15 Dal secondo grafico noto che nel '44 il record femminile ha una variazione del 3% rispetto a quello di 4 anni prima. C'è un altro quadriennio in cui il record femminile ha avuto la stessa variazione percentuale? Quale? ...

Sia per gli uomini che per le donne, individua il quadriennio (o i quadrienni) in cui vi è stata la massima variazione percentuale e quello (o quelli) in cui vi è stata la minima variazione percentuale.

maschi: quadrienni con var. % max: .... con var. % min: ....
femmine: quadrienni con var. % max: .... con var. % min: ....

3. Ancora sui grafici - Le funzioni - Loro rappresentazione con software

Nelle schede di questa unità didattica abbiamo considerato diverse relazioni di proporzionalità, cioè relazioni del tipo *grandezza2* = *grandezza1*·*k*.

Si dice anche che *grandezza2* varia proporzionalmente a *grandezza1*; *k* viene detto *fattore di proporzionalità*: è il fattore moltiplicativo che applicato a *grandezza1* dà *grandezza2*.

Per abbreviare la scrittura invece di *grandezza1* e di *grandezza2* possiamo usare variabili costituite da una sola lettera, ad esempio x e y. La relazione può allora essere riscritta nella forma:

$$y = k \cdot x$$

oppure (poiché il risultato di una moltiplicazione non muta scambiando 1° e 2° termine):

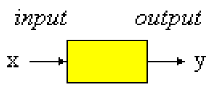
$$y = x \cdot k$$

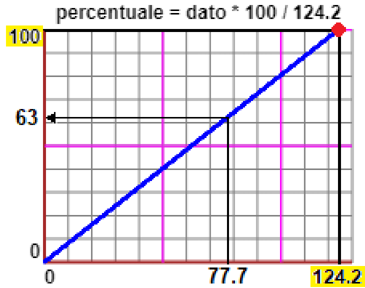
Abbiamo anche visto altre situazioni in cui i valori di una grandezza (y) possono essere individuati sulla base dei valori assunti da un'altra grandezza (x). Ad esempio: il *costo di una corsa ferroviaria* è determinabile con la tabella tariffaria se si conosce la *lunghezza del tragitto*; il *volume di un cubo* è calcolabile a partire dalla *lunghezza dello spigolo*; per specificare l'ammontare della *popolazione* italiana, il *record* del salto in alto, … dobbiamo precisare qual è la *data* presa in considerazione; per quantificare i *consumi alimentari annui* degli italiani dobbiamo riferirci a un *anno* particolare.

Si dice anche che y varia ***in funzione*** di x: il costo di una corsa ferroviaria varia in funzione della lunghezza del percorso, il costo di un prodotto venduto a peso varia in funzione del peso stesso, il volume di un cubo varia in funzione della lunghezza dello spigolo, … .

La relazione che intercorre tra x e y in questi casi viene chiamata ***funzione***.

Usando una terminologia informatica posso dire che y è l'output corrispondente all'input x; nel disegno a fianco la "scatola nera" rappresenta la funzione che ad x associa y.



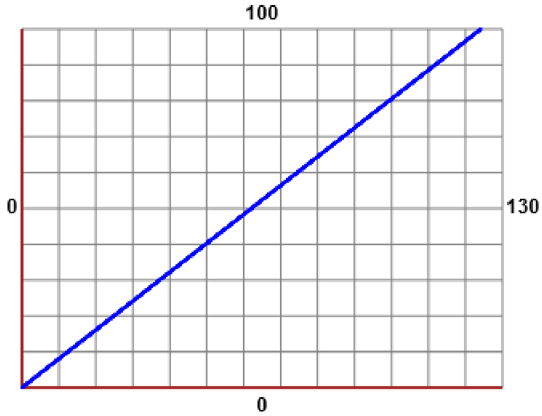


Nel caso della relazione di proporzionalità, il grafico della relazione che ad *x* associa *y* assume l'aspetto di una retta che passa per il punto (0,0).

A fianco è, ad esempio, riprodotto in piccolo il grafico già considerato dopo il ➔ quesito 16 della scheda 1 per rappresentare come, posto un totale di 124.2 uguale al numero 100, associare una *percentuale* ad un certo *dato*:

$$percentuale = dato \cdot \frac{100}{124.2}$$

Questo grafico lo avevamo tracciato su un foglio di carta millimetrata. Vediamo ora come possiamo realizzare facilmente il grafico col computer, con un altro script, in modo da ottenere l'immagine seguente:



Ecco lo script con cui è stato realizzato.

Due parole su che cos'è uno script. È un piccolo programma realizzato con un linguaggio di programmazione incorporato nei **browser**, cioè nelle applicazioni che consentono di navigare in rete e sono presenti in tutti i computer ed ora, in versioni particolari, nei telefoni cellulari. Gli script che noi useremo sono sono scritti in un linguaggio di scripting particolare, il più diffuso, **JavaScript**, in genere abbreviato in ***JS***, che viene continuamente aggiornato. Quasi tutte le operazioni che si effettuano in rete (acquisti, consultazione di orari, …) sono governate da degli script, ed anche questo "libro di testo" è realizzato in modo che quasi tutti i calcoli ed i grafici siano eseguibili direttamente dalle pagine Html con degli script, senza occupare risorse, fisiche ed economiche, per altri software, spesso poco affidabili.

Torniamo al nostro script: come vedere il testo "interno" di esso, così come il testo di una qualunque pagina Html? Dipende dal browser che si sta usando: in molti c'è un apposito "bottone" per farlo, in altri bisogna aprire un apposito comando da un menu "a cascata". Per poi eventualmente modificarlo, in genere, il modo più semplice è copiarne l'indirizzo Html che appare sulla barra in alto (http://macosa.dima.unige.it/schede/ls2/fun0_a.htm), accedere ad un'applicazione per leggere testi (è l'applicazione più importante che esiste su un computer: BloccoNote, NotePad, …) e incollare l'indirizzo dopo che si è agito sul comando "Apri". Nel caso dei Mac le applicazioni standard per leggere testi (TextEdit, …) a volte non sono in grado di vedere il testo interno di un file Html: un trucco può essere quello di salvare il file, modficarne l'estensione da "htm" a "txt", aprilo con l'applicazione per i testi, modicarlo e rimettere l'estensione "htm" (in alternativa esitono delle applicazioni specifiche per fare queste cose, ma non sono usulamente presenti sui computer: occorre cercarle e scaricarle da rete).

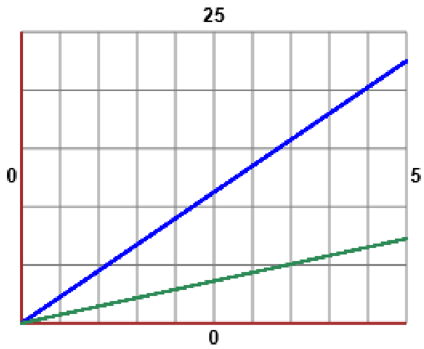
Ecco, comunque, che cosa si vede aprendo il file: la descrizione della funzione nella forma y = **f(x)** (si possono tracciare i grafici di altre 3 funzioni), l'intervallo degli input (x da 0 a 130), l'intervallo da assegnare agli output (da 0 a 100), la distanza tra i tratti verticali della griglia (Dx = 10) e quelli orizzonatali (Dy = 10).

```
function f(x) { y = 100*x/124.2; return y }
function g(x) { y = 1/0; return y }  // puoi definire altre funzioni
function h(x) { y = 1/0; return y }  // you can define other funcions
function k(x) { y = 1/0; return y }

aX = 0; bX = 130; aY = 0; bY = 100
Dx = 10; Dy = 10
```

Presa, gradualmente; un po' di dimestichezza con questo script, diventerà facile fare ogni tipo di grafico.

Vediamo un altro esempio. Tracciamo sullo stesso sistema di riferimento i grafici delle relazioni che esprimono il costo (in euro) in funzione del peso (in chilogrammi) di due prodotti venduti ai seguenti prezzi: 4.50 €/kg, 1.45 €/kg. Prevediamo un peso massimo di 5 kg.

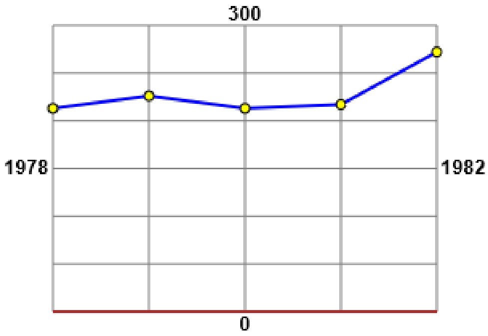


16 Il grafico è generato da questo script. Scrivi, qua sotto, le due funzioni di cui viene tracciato il grafico.

____

____

Ecco lo script che genera la figura sottostante a sinistra. Esamina il testo che viene evidenziato.

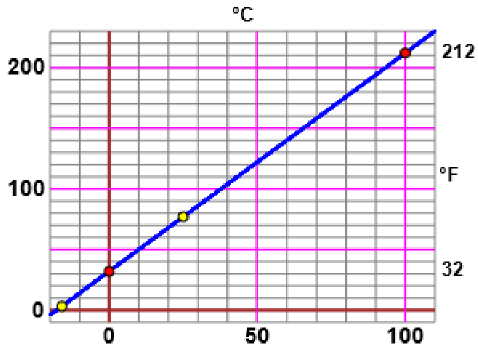


17 Che cosa dobbiamo cambiare nel file precedente per ottenere il grafico soprastante a destra?.

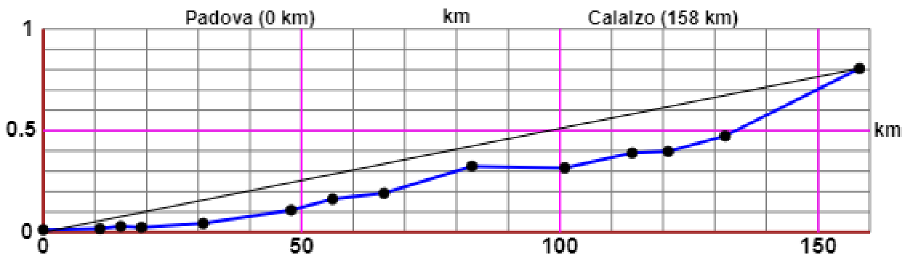
4. Esercizi

e1 In un opuscolo per turisti americani è presente il grafico riprodotto a lato, che mette in relazione la misura della temperatura in gradi Celsius (o centigradi) con quella in gradi Fahrenheit (usati nei paesi di lingua inglese). Ad esempio il punto (0,32) indica che a 0°C corrispondono 32°F, il punto (100,212) che a 100°C corrispondono 212°F. Che cosa indicano gli altri punti che abbiamo circolettato?

(cerca di ricavare dal grafico i valori approssimati alle unità, tollerando l'errore di un grado in più o in meno)



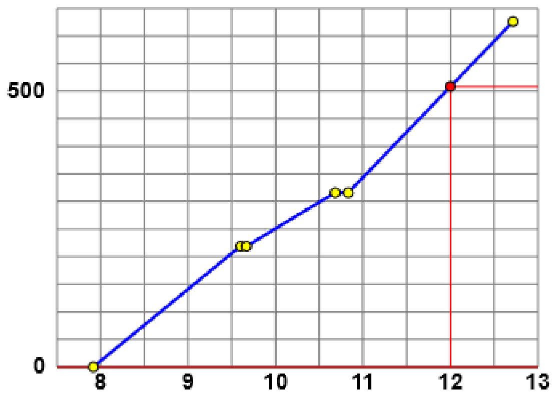
e2 Il grafico seguente rappresenta l'altitudine della linea ferroviaria Padova-Calalzo [→ *LMSM-2*]. Calcola (arrotondata a 2 cifre) la pendenza media di tale linea ferroviaria, cioè il rapporto tra variazione complessiva di altitudine e strada percorsa "orizzontalmente" (come abbiamo visto, nel caso delle pendenze stradali, si può approssimare l'avanzamento orizzontale con la lunghezza del tratto percorso; quindi puoi prendere 158 km come strada percorsa orizzontalmente). Se la linea ferroviaria avesse pendenza costante (cioè avesse la rappresentazione grafica tracciata in colore nero) quale sarebbe la sua pendenza?



e3 Un treno Milano-Roma parte alle 7:55, alle 9:36 arriva a Bologna (219° km) e ne riparte alle 9:40; alle 10:41 arriva a Firenze (316° km) e ne riparte alle 10:50. Alle 12:43 arriva a Roma, alla stazione Tiburtina (626° km).

Nel grafico a fianco i pallini gialli indicano le posizioni (in km) del treno nelle diverse stazioni in funzione degli orari di partenza o di arrivo in esse. Ricorda che, ad esempio, 10:41 sta per 10 h 41', cioè 10+41/60 h.

Dal grafico si può dedurre che alle 12 il treno (se in orario) transita, circa, al 510° km?



e4 Il costo di un particolare viaggio in pullman è passato da 1.7 € a 2.1 €. Calcola il rapporto tra prezzo nuovo e prezzo vecchio e, da questo valore, ricava l'aumento percentuale del prezzo della corsa.

e5 Un vestito che costa 19 € viene venduto in liquidazione a 16 €. Calcola il rapporto tra prezzo nuovo e prezzo vecchio e, da questo valore, ricava lo sconto percentuale corrispondente.

e6 Una maglia, il cui prezzo è 70 €, viene venduta con uno sconto del 25%, cioè ad un prezzo pari al 75% (=0.75) del prezzo di listino. Qual è il prezzo scontato?

e7 Traduci in una formula la frase «La distanza tra due località si ottiene dividendo la distanza tra le corrispondenti posizioni sulla cartina per il fattore di scala» usando le variabili *DistanzaRealtà*, *DistanzaCarta* e *FattoreScala*.

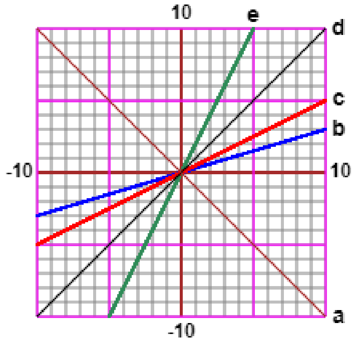
e8 Traduci in una formula la frase «Detraendo le trattenute dallo stipendio lordo si ottiene lo stipendio netto» usando le variabili *StipendioNetto*, *Trattenute* e *StipendioLordo*.

e9 Traduci in una formula la frase «L'imposta è pari al 22 per cento del valore che si ottiene detraendo le trattenute dal reddito lordo» usando le variabili *Imposta*, *Trattenute* e *RedditoLordo*.

e10 A fianco sono tracciate alcune rette che, nel sistema di riferimento fissato, rappresentano delle relazioni tra i numeri rappresentati sull'asse orizzontale e i numeri rappresentati sull'asse verticale.

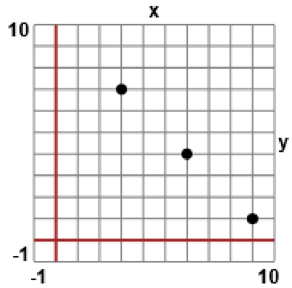
Sotto sono elencate alcune relazioni tra un generico numero x rappresentato sull'asse orizzontale e un generico numero y rappresentato sull' asse verticale. Si associ ad ogni retta la relazione che essa rappresenta (per motivare la scelta fatta si individui un punto (x,y) appartenente alla retta considerata, ma non alle altre rette).

(1) x è il doppio di y;
(2) $y = x$;
(3) $x = -y$;
(4) y è il 30% di x;
(5) $y = x \cdot 2$

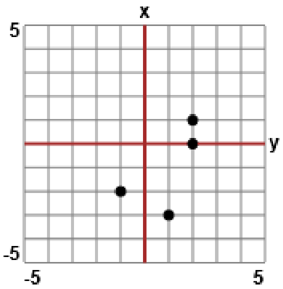


e11 Completa (a fianco) il grafico della relazione tra i numeri x rappresentati sull'asse orizzontale e i numeri y rappresentati sull'asse verticale così definita:

«x e y sono in relazione se sono entrambi interi positivi e hanno come somma 10».



e12



Completa (a lato) il grafico della relazione:

«x e y sono interi appartenenti all'intervallo [-3, 3] tali che $x > y$».

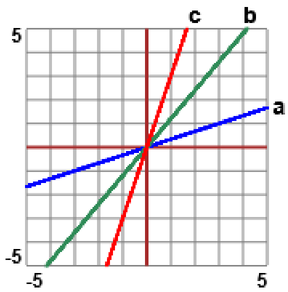
Sono già tracciati i punti corrispondenti alle seguenti diseguaglianze:

$2 > 1$, $2 > 0$, $-1 > -2$, $1 > -3$

e13 A fianco sono riprodotte le rette che sono grafici delle relazioni:

$y = x \cdot (1/3)$, $y = x \cdot 1.2$, $y = x \cdot 3$.

Calcola la pendenza (= spostamento verticale/spostamento orizzontale) delle tre rette.

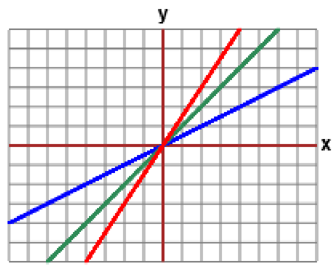


e14 Le relazioni del quesito e13 rappresentano y "in funzione" di x.

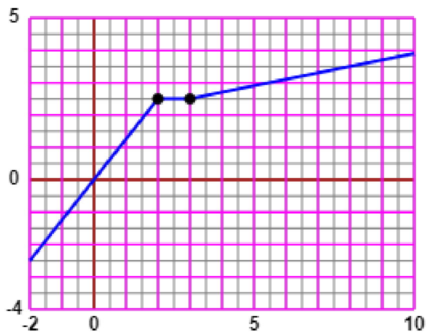
Dato x si può ricavare y sia usando le equazioni che ricorrendo al grafico: ad es. nel caso di $y=x \cdot 1.2$ si può stabilire che a 3 viene associato 3.6 osservando che l'unico punto con x=3 del grafico ha y=3.6.

Nel caso delle relazioni dei quesiti e10, e11, e12 siamo di fronte a situazioni in cui y è funzione di x?

e15 A fianco sono tracciate (in un sistema monometrico) le tre rette passanti per (0,0) con pendenze 0.5, 1 e 1.5 che si ottengono come grafici di tre opportune funzioni F, G ed H. Scrivi le espressioni di F(x), G(x) e H(x).



e16 Calcola la pendenza dei tre tratti rettilinei che compongono il grafico a lato.

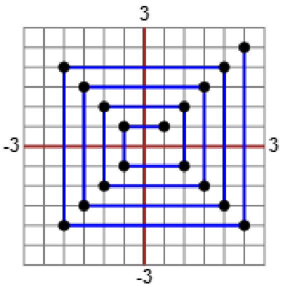


e17 Tenendo conto (→ quesito e1) che i punti (0,32) e (100,212) appartengono alla retta che rappresenta il grafico della temperatura in gradi Fahrenheit in funzione della temperatura in gradi Celsius, trova la variazione in °F corrispondente alla variazione di 1°C.

e18 Completa la tabella seguente (arrotondati i valori a 3 cifre); vedi i quesiti → e14 della scheda 1.

anno	spesa alim. pro-capite	retribuzione lorda	spesa alim. pro-capite	retribuzione lorda
1926	$1.94 \cdot 10^3$ L	$9.15 \cdot 10^3$ L	21.2%	100
1945	$2.09 \cdot 10^4$ L	$7.34 \cdot 10^4$ L	28.5%	100
1965	$1.96 \cdot 10^5$ L	$1.42 \cdot 10^6$ L		100
1985	$2.04 \cdot 10^6$ L	$1.71 \cdot 10^7$ L		100
2005	$2.19 \cdot 10^3$ €	$3.01 \cdot 10^4$ €		100

e19 Rappresenta graficamente l'evoluzione della percentuale della spesa alimentare del quesito e18.

e20 

Gli script che abbiamo impiegato possono essere usati per tracciare figure di vario tipo. Prova ad aprire **questo** script e modificalo in modo da ottenere la figura a fianco.

Nota. Questa figura, così come quelle presenti negli esercizi e10-e13, sono state realizzate in un sistema di riferimento ***monometrico***, cioè in cui per le "x" e per le "y" è stata scelta la stessa "unità di misura": la variazione di una unità in orizzontale e quella di una unità in verticale corrispondono a tratti lunghi uguali.

e21 Un supermercato fa un'offerta "3 per 2" su alcuni prodotti. Cioè se il cliente compra 3 "pezzi" di un prodotto in offerta, ne paga 2 soli. Calcola lo sconto percentuale che corrisponde a questa offerta.

$$\text{rapporto} = \frac{\text{PrezzoScontato}}{\text{PrezzoIniziale}} = \frac{\text{CostoUnitario}\cdot 2}{\text{CostoUnitario}\cdot 3} = \frac{2}{3} = \qquad =.666\ldots = 66.6\ldots\% =$$

= [arrotondando alle unità] ......% = 100% – ......

Il prezzo iniziale viene diminuito (scontato) del ......%

e22 Un paio di jeans viene offerto in saldo a 57 €, con uno sconto del 20%. Qual era il prezzo in origine? [*traccia*: il prezzo scontato è l'80% del prezzo iniziale, cioè: *PrezzoScontato*=*PrezzoIniziale*·0.8; quindi: *PrezzoIniziale*=…]

e23 Su un particolare prodotto è prevista l'IVA del 20% (cioè il 20% del prezzo di vendita viene versato allo stato come imposta). A quanto si deve vendere il prodotto per incassare al netto dall'imposta 4.50 €? [*traccia*: procedi in maniera analoga al quesito precedente: *PrezzoVendita*=*PrezzoSenzaIVA*·… ; …]

e24 Dalla tabella dopo il quesito 10 osserviamo che la variazione dei dati assoluti dal 1972 al 1980 è di 7 cm sia per gli uomini che per le donne mentre la variazione dei numeri indici corrispondenti (riportati dopo il quesito 11) è diversa (116.3-112.8 = 3.5 in un caso, 121.8-117.6 = 4.2 nell'altro). Come mai?

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
grafico di una relazione (dopo fig.4), *pendenza media* (dopo ques.8), *aumento medio* (dopo ques.8), *numero indice* (dopo ques.11), *variazione percentuale* (prima di ques.13), *sistema monometrico* (e20), *grandezza che varia in funzione di un'altra* (§3).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").